### Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

### Zadanie 3

Interpolacja

Funkcje sklejane

Mateusz Łopaciński

### Dane techniczne sprzętu

Obliczenia zostały wykonane na komputerze o następujących parametrach:

* Procesor: AMD Ryzen 7 4700U (8 rdzeni, 8 wątków),
* Pamięć RAM: 16 GB 3200 MHz

### Interpolowana funkcja

#### **Wzór funkcji**

Interpolację przeprowadziłem dla poniższej funkcji

**(2.1.1.)**

gdzie

**(2.1.2.)**

na przedziale

**(2.1.3.)**

#### **Wykres funkcji**

Obraz zawierający woda, łódź, różny, linia

Opis wygenerowany automatycznie

Rys. 2.2. Wykres badanej funkcji

### Zastosowane metody interpolacji

#### **Funkcja sklejana 2. stopnia**

#### **Sposób wyznaczania funkcji**

Równanie funkcji sklejanej 2. stopnia, możemy w ogólności zapisać jako

**(3.1.1.1.)**

gdzie każdy z segmentów funkcji, określony na przedziale   
() opisany jestwzorem **(3.1.1.1.)**.

Aby **(3.1.1.1.)** była funkcją sklejaną 2. stopnia, musi spełniać następujące warunki:

1. dla
2. dla
3. dla

**(3.1.1.2.)**

Z warunku 1. otrzymujemy:

**(3.1.1.3.)**

Różniczkując wyrażenie **(3.1.1.1.)** względem , otrzymujemy:

**(3.1.1.4.)**

To z kolei pozwala nam na wykorzystanie warunku 3.:

**(3.1.1.5.)**

Wykorzystując 1. (korzystam z przekształcenia do postaci **(3.1.1.3.)**) oraz 2. warunek, a także. korzystając z wzoru **(3.1.1.5.)**, otrzymujemy:

**(3.1.1.6.)**

Przesuwając indeks o 1 w dół, uzyskujemy:

**(3.1.1.7.)**

Jak możemy zauważyć, jedynymi niewiadomymi są teraz wartości współczynników , ponieważ wartości są znane (**(3.1.1.3)**), a wartości obliczymy, znając wartości (**(3.1.1.5)**). Otrzymujemy więc układ równań:

**(3.1.1.8.)**

Układ ten ma niewiadomych, ale tylko równań. Jak widzimy w powyższym układzie równań, obliczać także będziemy , mimo, że nie jesteśmy w stanie wyznaczyć . Takie podejście ma na celu umożliwienie obliczenia współczynnika , który obliczamy ze wzoru **(3.1.1.5.)**. Musimy więc skorzystać z warunku brzegowego, w celu wyznaczenia brakującego równania.

#### **Warunki brzegowe**

* **Natural Spline (Free Boundary)**

**(3.1.2.1.)**

Korzystając z **(3.1.1.4.)**, otrzymujemy:

**(3.1.2.2.)**

Zauważmy, że możemy teraz bardzo łatwo rozwiązać układ równań **(3.1.1.8.)**. Kolejno przekształcamy równania, korzystając z wyznaczonych w poprzednich równaniach wartości współczynników :

**(3.1.2.3.)**

W ogólności, wystarczy policzyć wartości współczynników z równania:

**(3.1.2.4.)**

Pozostałe współczynniki obliczamy z wyznaczonych wcześniej wzorów **(3.1.1.3.)** oraz **(3.1.1.5.)**.

* **Clamped Boundary**

W przypadku tego warunku brzegowego, przyjmuje się, że jedna z pierwszych pochodnych na krańcach jest znana lub przybliżona, przy pomocy ilorazów różnicowych, tzn.:

lub

**(3.1.3.1.)**

Do wyznaczenia przybliżonej wartości pochodnej (jeżeli dokładna wartość nie jest znana), najlepiej skorzystać z ilorazu różnicowego.

**(3.1.3.2.)**

Korzystając z wzoru **(3.1.1.4.)**, możemy przekształcić powyższe równanie do następującej postaci:

**(3.1.3.3.)**

#### **Funkcja sklejana 3. stopnia**

#### **Sposób wyznaczania funkcji**

Równanie funkcji sklejanej 3. stopnia, możemy w ogólności zapisać jako:

**(3.2.1.1.)**

gdzie każdy z segmentów funkcji, określony na przedziale   
() opisany jestwzorem **(3.2.1.1.)**.

Aby **(3.2.1.1.)** była funkcją sklejaną 3. stopnia, musi spełniać następujące warunki:



**(3.1.1.2.)**

Ponieważ funkcja jest funkcją sześcienną, liniowa na przedziale . Wprowadźmy oznaczenia . Funkcję możemy więc zapisać w postaci zależności liniowej:

**(3.2.1.3.)**

Całkując obustronnie funkcję , otrzymujemy:

**(3.2.1.4.)**

Korzystając z warunków interpolacji, możemy wyznaczyć wartości stałych całkowania. Po ich wyznaczeniu, otrzymujemy wzór postaci:

**(3.2.1.5.)**

Zauważmy, że w powyższym wzorze jedynie nie znamy . W celu jego wyznaczenia, korzystamy z warunku ciągłości pierwszej pochodnej, a więc różniczkujemy :

**(3.2.1.6.)**

Dla przejrzystości wprowadzamy symbole oraz .

**(3.2.1.7.)**

Po wstawieniu do **(3.2.1.6.)**, uzyskujemy:

**(3.2.1.8.)**

Natomiast, z drugiej strony:

**(3.2.1.9.)**

Z warunku ciągłości otrzymujemy finalną postać równania:

**(3.2.1.10.)**

Jak możemy zauważyć, mamy niewiadomych , ale tylko równań. Musimy więc określić dwa dodatkowe warunki.

#### **Warunki brzegowe**

* **Cubic Function**

Przyjmujemy, że:

– funkcja sześcienna przechodząca przez pierwsze 4 punkty

– funkcja sześcienna przechodząca przez pierwsze 4 punkty

Z powyższych założeń wynika więc, że:

oraz

**(3.2.2.1.)**

Korzystając z metody ilorazów różnicowych, możemy wyznaczyć przybliżoną wartości 3. pochodnych funkcji i :

\*Uwaga: W powyższych wzorach oznacza co innego niż we wzorach z podpunktu 3.2.1.

**(3.2.2.2.)**

Przybliżenie pochodnej otrzymujemy mnożąc , więc:

**(3.2.2.3.)**

Przekształcając powyższe równania, otrzymujemy 2 brakujące warunki:

**(3.2.2.4.)**

* **Natural Spline (Free Boundary)**

**(3.2.3.1.)**

Korzystając z **(3.2.1.7)**, mamy . Uwzględniając powyższe równanie, otrzymujemy:

**(3.2.3.2.)**

Znamy więc już 2 wartości niewiadomych (), dlatego możemy rozwiązać układ równań z punktu **(3.2.1.10.)**.

### Wyznaczanie dokładności przybliżenia interpolowanej funkcji przez funkcję sklejaną

W celu wyznaczenia dokładności, z jaką funkcja sklejana przybliża zadaną funkcję (daną wzorem **(2.1.1.)**), skorzystałem z wymienionych niżej wskaźników, pozwalających na określenie dokładności. Pomiar dokładności przeprowadzałem, porównując wartości interpolowanej funkcji z wartościami wyznaczonego wielomianu interpolującego dla 1000 równoodległych punktów, rozmieszczonych na całym przedziale .

#### **Norma z różnicy wartości funkcji i wielomianu**

Norma z różnicy między wartościami funkcji **(2.1.1.)** a wartościami wyznaczonego wielomianu interpolacyjnego .

**(4.1.1)**

Powyższy wzór wykorzystałem przy rysowaniu wykresów błędów przybliżenia interpolowanej funkcji przez wielomian.

#### **Największa różnica wartości funkcji i wielomianu**

Największa różnica miedzy wartością przyjmowaną przez funkcję a wartością wielomianu interpolacyjnego.

**(4.2.1)**

#### **Suma kwadratów różnic funkcji i wielomianu**

Suma kwadratów różnic między wartościami funkcji i wielomianu interpolacyjnego.

**(4.3.1)**

### Rezultaty dla wybranych liczb węzłów

### Wyznaczanie wielomianu najlepiej przybliżającego interpolowaną funkcję

#### **Metodologia postępowania**

#### **Wykres wielomianu najlepiej przybliżającego funkcję**

### Zestawienie błędów przybliżeń funkcji

#### **Dla węzłów równoodległych**

#### **Dla węzłów Czebyszewa**

### Wnioski